56

(1)

$a_{n+1}=2a_n+6b_n$ より，$b_n=\dfrac{a_{n+1}-2a_n}{6}$

よって，$b_{n+1}=2a_n+3b_n$ は，$\dfrac{a_{n+2}-2a_{n+1}}{6}=2a_n+3\cdot\dfrac{a_{n+1}-2a_n}{6}$ と変形できる。

この両辺に 6 を掛け，整理すると，$a_{n+2}=5a_{n+1}+6a_n$ ・・・①

一方，$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta\left(a_{n+1}-\alpha a_n\right)$ より，$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$ ・・・②

したがって，①，②より，$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=-6$

よって，$\alpha,\ \beta$ は t の 2 次方程式 $t^2-5t-6=0$ の解である。

これと，$t^2-5t-6=(t+1)(t-6)$ より，$(t+1)(t-6)=0$

よって，$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 6),\ (6,\ -1)$

(2)

$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 6)$ のとき

$$\begin{aligned}a_{n+2}+a_{n+1}&=6\left(a_{n+1}+a_n\right)\\&=6^n\left(a_2+a_1\right)\end{aligned}$$

これと，$a_1=1$，$a_2=2a_1+6b_1=8$ より，$a_{n+2}+a_{n+1}=9\cdot 6^n$

$\therefore a_{n+1}+a_n=9\cdot 6^{n-1}$ ・・・③

$(\alpha,\ \beta)=(6,\ -1)$ のとき

$$\begin{aligned}a_{n+2}-6a_{n+1}&=-\left(a_{n+1}-6a_n\right)\\&=(-1)^n\left(a_2-6a_1\right)\\&=(-1)^n(8-6\cdot 1)\\&=2\cdot(-1)^{n-1}\end{aligned}$$

$\therefore a_{n+1}-6a_n=2\cdot(-1)^{n-1}$ ・・・④

③－④より，$7a_n=9\cdot 6^{n-1}-2\cdot(-1)^{n-1}$ $\quad\therefore a_n=\dfrac{9\cdot 6^{n-1}-2\cdot(-1)^{n-1}}{7}$

(3)

(1)で $b_n=\dfrac{a_{n+1}-2a_n}{6}$ より，

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{a_{n+1}-2a_n}{6}\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{9\cdot 6^n-2\cdot(-1)^n-18\cdot 6^{n-1}+4\cdot(-1)^{n-1}}{7}\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{54\cdot 6^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1}-18\cdot 6^{n-1}+4\cdot(-1)^{n-1}}{7}\\&=\frac{6\cdot 6^{n-1}+(-1)^{n-1}}{7}\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{9\cdot 6^{n-1}-2\cdot(-1)^{n-1}}{7}\cdot\frac{7}{6\cdot 6^{n-1}+(-1)^{n-1}}$$
$$=\frac{9\cdot 6^{n-1}-2\cdot(-1)^{n-1}}{6\cdot 6^{n-1}+(-1)^{n-1}}$$
$$=\frac{6^{n-1}\left\{9-2\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}{6^{n-1}\left\{6+\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$$
$$=\frac{9-2\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}{6+\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9-2\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}{6+\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}=\frac{3}{2}$

補足

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$の一般項を同時に求める方法

$a_{n+1}=2a_n+6b_n$ ・・・① $b_{n+1}=2a_n+3b_n$ ・・・②

とすると，①－$k\times$②より，

$$a_{n+1}-kb_{n+1}=2a_n+6b_n-2ka_n-3kb_n$$
$$=(2-2k)a_n+(6-3k)b_n$$

ここで，$k\neq 1$とすると，

$$a_{n+1}-kb_{n+1}=2a_n+6b_n-2ka_n-3kb_n$$
$$=(2-2k)\left(a_n+\frac{6-3k}{2-2k}b_n\right)$$

よって，数列$\{a_n-kb_n\}$が公比$2-2k$の等比数列となるようなkを求めると，

$-k=\dfrac{6-3k}{2-2k}$より，$2k^2-5k+6=0$ すなわち$(k+2)(2k-3)=0$ $\therefore k=-2,\ \dfrac{3}{2}$

これより，

$k=-2$のとき

数列$\{a_n+2b_n\}$は公比$2-2\cdot(-2)=6$，初項$a_1+2b_1=3$の等比数列である。

よって，$a_n+2b_n=3\cdot 6^{n-1}$ ・・・③

$k=\dfrac{3}{2}$ のとき

数列$\left\{a_n-\dfrac{3}{2}b_n\right\}$は公比$2-2\cdot\dfrac{3}{2}=-1$，初項$a_1-\dfrac{3}{2}b_1=-\dfrac{1}{2}$の等比数列である。

よって，$a_n-\dfrac{3}{2}b_n=-\dfrac{1}{2}\cdot(-1)^{n-1}$ ・・・④

③－④より，$\dfrac{7}{2}b_n=3\cdot 6^{n-1}+\dfrac{1}{2}\cdot(-1)^{n-1}$ $\therefore b_n=\dfrac{6\cdot 6^{n-1}+(-1)^{n-1}}{7}$

これを③に代入することにより，$a_n=\dfrac{9\cdot 6^{n-1}-2\cdot(-1)^{n-1}}{7}$